CONCOURS D'ENTREE A - 2000

EPREUVE de MATHEMATIQUES II

Durée 2 heures

(tous les candidats)

L'usage des calculatrices est autorisé

Les trois parties sont indépendantes.

Notations et Rappels.

$M_n(R)$ représente l'algèbre des matrices (n,n) à coefficients réels ; I_n est l'élément neutre de $M_n(R)$ pour la multiplication et 0_n est l'élément neutre de $M_n(R)$ pour l'addition.

E_{ij} est la matrice de $M_n(R)$ dont tous les éléments sont nuls sauf celui en $i^{ième}$ ligne et $j^{ième}$ colonne qui vaut 1.

On rappelle que $\{ E_{ij} / i \in \{1,2,..,n\}; j \in \{1,2,..,n\} \}$ est la base canonique de $M_n(R)$.

Une matrice A de $M_{2n}(R)$ peut se décomposer en 4 sous-matrices de $M_n(R)$:

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

où A_{11} est la matrice obtenue en prenant les éléments communs aux n premières lignes et aux n premières colonnes de A, A_{12} est la matrice obtenue en prenant les éléments communs aux n premières lignes et aux n dernières colonnes de A, A_{21} est la matrice obtenue en prenant les éléments communs aux n dernières lignes et aux n premières colonnes de A, A_{22} est la matrice obtenue en prenant les éléments communs aux n dernières lignes et aux n dernières colonnes de A.

On admettra que la multiplication de deux matrices de $M_{2n}(R)$ peut se faire par blocs associés comme elle se fait par éléments, c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

($A_{ij}B_{kl}$ représente le produit des 2 matrices A_{ij} et B_{kl} dans $M_n(R)$)

On admettra que si A_{21} est la matrice nulle de $M_n(R)$ on a le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0_n & A_{22} \end{pmatrix}$ qui vaut : $dét\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0_n & A_{22} \end{pmatrix} = dét(A_{11}) \times dét(A_{22})$, et de même :

$dét\begin{pmatrix} A_{11} & 0_n \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = dét(A_{11}) \times dét(A_{22})$.

I. Une première application.

1) Préliminaires.

Etant donnée une matrice A de $M_n(R)$, on note f_A l'application de $M_n(R)$ dans $M_n(R)$ qui à toute matrice M de $M_n(R)$ associe $f_A(M) = A \times M$.

a) Montrer que f_A est un endomorphisme de $M_n(R)$.

b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f_A soit un automorphisme de $M_n(R)$. Exprimer dans ce cas l'application réciproque de f_A.

2) Etude d'un cas particulier. On prend n = 2 et $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

a) Montrer que A est diagonalisable.

b) Quelle est la matrice A' de f_A dans la base canonique $\{ E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22} \}$ de $M_2(R)$?

c) Donner le polynôme caractéristique de f_A en fonction de celui de A.

d) On note P une matrice de passage qui diagonalise A (c'est-à-dire $P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$), calculer le produit de matrices :

$$\begin{pmatrix} P^{-1} & 0_2 \\ 0_2 & P^{-1} \end{pmatrix} \times A' \times \begin{pmatrix} P & 0_2 \\ 0_2 & P \end{pmatrix}$$

Que peut-on en conclure pour A' ?

3) Etude des valeurs propres de A et de f_A dans le cas général.

a) Montrer que toute valeur propre de f_A est valeur propre de A. (on utilisera la définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre associé)

b) Etant donnée une valeur propre λ de A et U un vecteur propre associé à λ ; on note D la droite vectorielle engendrée par U et F un sous espace vectoriel de R^n supplémentaire à D, enfin on note P la matrice dans la base canonique de R^n du projecteur sur D de direction F. Justifier $A.P = \lambda P$.

c) Que peut-on conclure pour l'ensemble des valeurs propres de A et l'ensemble des valeurs propres de f_A ?

II. Une deuxième application.

1) Soient deux matrices A et B de $M_n(R)$, calculer dans $M_{2n}(R)$ les produits de matrices définies par blocs :

$$\begin{pmatrix} \lambda I_n - BA & B \\ 0_n & \lambda I_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ A & I_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ A & I_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \lambda I_n & B \\ 0_n & \lambda I_n - AB \end{pmatrix}$$

En déduire que les 2 matrices AB et BA ont même polynôme caractéristique.

2) On suppose que A est une matrice inversible, montrer que les matrices AB et BA sont semblables.

3) Soient une matrice A non inversible de $M_2(R)$, et B une matrice quelconque de $M_2(R)$, démontrer les implications :

a) (rang (AB) = 1 et rang (BA) = 0) $\Rightarrow$ (AB et BA non semblables).

b) (rang (AB) = rang (BA) = 0) $\Rightarrow$ (AB et BA semblables).

c) (rang (AB) = rang (BA) = 1) $\Rightarrow$ (AB et BA semblables).

III. Une troisième application.

1) Soit une matrice A de $M_{2n}(R)$ constituée de 4 blocs éléments de $M_n(R)$:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

a) On suppose que A_{11} est inversible et que $A_{11}A_{21} = A_{21}A_{11}$; en calculant le produit de matrices par blocs

$\begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0_n \\ -A_{21} & A_{11} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ montrer que : $dét(A) = dét(A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12})$.

b) On suppose que $A_{11}A_{21} = A_{21}A_{11}$ et on note $A'_{11} = A_{11} - x.I_n$. Montrer que pour tout réel x non valeur propre de A_{11} on a : $dét\begin{pmatrix} A'_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = dét(A'_{11}A_{22} - A_{21}A_{12})$.

En déduire qu'on a encore : $dét(A) = dét(A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12})$.

c) On suppose que $A_{22}A_{21} = A_{21}A_{22}$, montrer qu'on a : $dét(A) = dét(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})$.

2) Soit une matrice A de $M_n(R)$ et une matrice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $M_2(R)$, calculer le déterminant de la matrice par blocs $M = \begin{pmatrix} aA & bA \\ cA & dA \end{pmatrix}$ en fonction de $dét(A)$ et de $dét(B)$.

3) Soient 2 matrices A et B de $M_n(R)$ telles que $AB = BA$, montrer que $dét\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$ est un réel positif ou nul. (il peut être intéressant de faire apparaître les matrices $A + iB$ et $A - iB$)